Variationsregning

Søren Haagerup

16. februar 2007

Resumé

I denne opgave behandles variationsproblemer af én variabel. Herunder bevises gyldigheden af Euler-Lagrange's differentialligning, samt et specialtilfælde heraf. Til slut berøres variationsproblemer med bibetingelser, og undervejs er gennemgangen krydret med udvalgte eksempler, der benytter den udviklede metode i praksis – heriblandt *det brachistochrone problem*, *omdrejningslegeme med minimalt areal* og til slut det isoperimetriske problem om *kædelinjen*.

Indhold

1 Introduktion

Variationsregningen behandler optimeringsopgaver - dog er dette ikke optimeringsopgaver i traditionel forstand, hvor målet er, at finde ekstremaer for en given funktion. I variationsregningen er man derimod interesseret i at finde en *funktion*, der minimerer eller maksimerer en *funktional*. I vores tilfælde er en funktional er et bestemt integral, der for en given funktion måler noget bestemt. Eksempelvis kunne den måle afstanden mellem to punkter langs en kurve – senere i denne opgave eftervises det med variationsregningens metoder, at den funktion, der optimerer denne funktional er *den rette linje*.

Grundidéen til variationsregningen fik Jakob Bernouilli i 1696, da hans bror Johann Bernouilli havde stillet en opgave om, hvilken kurve en partikel skal følge, hvis den på en gnidningsfri bane skal hurtigst fra ét punkt til et andet (det brachistochrone problem). I dette tilfælde opstiller man sin funktional efter fysiske betragtninger, så den måler den tilbagelagte tid for den pågældende partikels bane.

Sidenhen blev variationsregningen videreudviklet af L. Euler (1707-1783) og I.-L. Lagrange (1736-1813), og det er deres metoder jeg vil tage et kig på.

2 Indledende definitioner

Variationsregningen bygger delvist på matematik der ligger over gymnasieniveau – heriblandt mængdebegreber og teori hørende til funktioner af flere variable – og indledningsvis vil jeg redegøre for de væsentligste begreber, jeg får brug for senere i opgaven.

2.1 Skrivemåder

Med en C^n-funktion, menes en funktion der er n gange differentiabel med kontinuerte afledte. Skrivemåden $f \in C^n$ bruges ligeledes.

2.2 Om mængder

2.2.1 Metrisk rum[1]

Et metrisk rum (S, d), er en mængde S hvortil der er knyttet en afstandsfunktion (en *metrik*) $d : S^2 \to \mathbb{R}$, der til ethvert par af punkter $x, y \in S$ knytter et reelt tal $d(x, y)$, som kaldes afstanden fra x til y. Denne metrik skal desuden opfylde forskellige krav:

(1) $d(x, y) \geq 0 d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) (*symmetri*) $d(x, y) = d(y, x)$ for alle $x, y \in S$

(3) (*trekantsuligheden*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$

2.2.2 Åben mængde[2]

Lad (S, d) være et metrisk rum. En delmængde W af S kaldes en åben mængde i det metriske rum (S, d), hvis der for ethvert $x \in W$ findes $\delta > 0$ så $B_\delta(x) \subseteq W$. B-mængden er defineret

[1] Grundbegreber i den Moderne Analyse, s. I.4
[2] Grundbegreber i den Moderne Analyse, I.10

ved:

$$B_\delta(x_0) = \{x \in S | d(x_0, x) < \delta\}$$

Sagt med andre ord, er en åben mængde, en mængde, hvor der om hvert punkt er en omegn.

2.3 Partiel differentation og kædereglen[3]

Funktioner af flere variable kan differentieres efter hver enkelt variabel, mens alle øvrige variable fastholdes. Haves en funktion $f(a, b, c)$, findes den afledte ved:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial a}(f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial}{\partial b}(f(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial}{\partial c}(f(x(t), y(t), z(t))z'(t) \\ &= f'_a(x(t), y(t), z(t)x'(t) + f'_b(x(t), y(t), z(t)y'(t) + f'_c(x(t), y(t), z(t)z'(t) \end{aligned}$$

Bemærk sidstnævnte, kortere skrivemåde, der vil blive brugt senere i opgaven. Et specialtilfælde af kædereglen er med den endimensionelle funktion $y = f(a), a = x(t)$

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t))x'(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{da}\frac{da}{dt}$$

2.4 Niveaukurver, gradientvektor og retningsafledte

Selvom overskriften måske ikke direkte virker relevant i forbindelse med variationsregning, har jeg valgt kort at omtale disse begreber, da jeg får brug for dem i en sætning senere i opgaven.

En niveaukurve C for en funktion $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kan defineres ved

$$C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = k\}$$

hvor k er en konstant. En niveaukurve svarer til højdekurver på landkort, eller isobarer på vejrkort. Den går således igennem alle punkter, hvor funktionsværdien er lig konstanten k.

I et hvert punkt (x, y) af $f(x, y) \in C^1$ findes gradientvektoren defineret ved [4]

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

En geometrisk fortolkning af gradientvektoren, er, at funktionen $f(x, y)$ vokser mest i den retning, som gradientvektoren peger.

Gradientvektoren kan også bruges til at bestemme den retningsafledte til en funktion. Vil man finde den retningsafledte i punktet (a, b) i samme retning som enhedsvektoren $\vec{u}$, kan den findes ved skalarproduktet[5]

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = \vec{u} \cdot \nabla f(a, b)$$

Når en funktion af 2 variable afbilledes, sker det med et 3-dimensionelt plot. Så snart man dog vælger en retning og et udgangspunkt i det 3-dimensionelle landskab, kan der vises en 2-dimensional graf over dette udsnit. Den retningsafledte er nu differentialkvotienten for et givent sted på denne 2-dimensionelle graf.

[3] Calculus, A Complete Course 6th Ed. s. 675
[4] Calculus s. 680-682
[5] Se evt. bevis, Calculus s. 681

3 Det simpleste variationsproblem[6]

Der er givet en to gange differentiabel funktion med kontinuerte afledte

$$F(x,y,p)$$

på en åben mængde Ω. Herudover er givet to punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i xy-planen, hvor $a_1 < a_2$. En funktion

$$y = f(x), f \in C^2([a_1,a_2])$$

hvorom det gælder, at den opfylder **randbetingelserne** $f(a_1) = b_1$ og $f(a_2) = b_2$ kaldes **tilladt funktion**. Mængden M indeholdende alle tilladte funktioner er et metrisk rum med metrikken $d(f,g) = max\{|f(x) - g(x)||x \in [a_1,a_2]\}$. På mængden M betragtes funktionalen

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x), f'(x))dx$$

En funktional er er en funktion med funktioner som definitionsmængde. I variationsregningen ønsker vi at finde et ekstremum for denne funktional, og resultatet af dette er netop en funktion.

Hvis en f_1 er en vilkårlig funktion i M, har I globalt minimum for funktionen f hvis $I(f_1) \geq I(f)$ og I globalt maksimum for funktionen f hvis $I(f_1) \leq I(f)$. I dette tilfælde kaldes f også en **stationær funktion** for $I(f)$.

3.1 Nødvendig betingelse for ekstremum

Når man undersøger funktioner, er en nødvendig betingelse for ekstremum, at $f'(x) = 0$. Inden for variationsregning, kan man også udlede en nødvendig betingelse for ekstremum - altså den funktion, der bedst optimerer I.

Som udgangspunkt antager vi, at I har ekstremum for den tilladte funktion f. Vi betragter funktionen

$$\phi(\epsilon) = I(f + \epsilon g) = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x) + \epsilon g(x), f'(x) + \epsilon g'(x))dx$$

hvor vi har defineret funktionen $g \in C^2([a_1,a_2])$ hvor $g(a_1) = g(a_2) = 0$, og ϵ er den faktor, funktionen g multipliceres med. Da Ω er en åben mængde og g og g' er begrænsede funktioner på $[a_1,a_2]$, er $\phi(\epsilon)$ defineret for ϵ i en omegn $]-\delta,\delta[$ af 0.

Vi antog før, at I havde ekstremum for funktionen f. $\phi(\epsilon)$ har derfor ekstremum for $\epsilon = 0$. Hermed gælder at $\phi'(0) = 0$, og det er netop dette, der er vores *nødvendige betingelse for ekstremum*. Dog skal udtrykket differentieres før det kan bruges i praksis. Vi flytter differentationstegnet under integraltegnet[7].

$$\phi'(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x)+\epsilon g(x), f'(x)+\epsilon g'(x))dx = \int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{d\epsilon} F(x, f(x)+\epsilon g(x), f'(x)+\epsilon g'(x))dx$$

[6] Baseret på noter fra København Universitet

[7] Et bevis for at denne operation er lovlig er at finde i Calculus s. 736

Der udføres nogle mellemregninger vha. kædereglen. I det følgende skrives $f(x)$ som f, $f'(x)$ som f' osv.

$$\frac{d}{d\epsilon}F(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')$$
$$= F'_x(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')\frac{dx}{d\epsilon} + F'_y(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')\frac{d(f+\epsilon g)}{d\epsilon} + F'_p(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')\frac{d(f'+\epsilon g')}{d\epsilon}$$
$$= F'_y(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')g + F'_p(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')g'$$

Det samlede udtryk for $\phi'(\epsilon)$ er altså nu blevet til,

$$\phi'(\epsilon) = \int_{a_1}^{a_2} \Big(F'_y(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')g + F'_p(x, f+\epsilon g, f'+\epsilon g')g'\Big)dx$$

For tilfældet $\phi'(0) = 0$ haves (nu skrevet fuldt ud) at

$$\phi'(0) = \int_{a_1}^{a_2} \Big(F'_y(x, f(x), f'(x))g(x) + F'_p(x, f(x), f'(x))g'(x)\Big)dx = 0$$

Sidste led integereres partielt, og det viser sig, at første led i 2. omskrivning går ud, da $g(a_1) = g(a_2) = 0$.

$$\int_{a_1}^{a_2} \Big(F'_p(x, f(x), f'(x))g'(x)\Big)dx$$
$$= \big[F'_p(x, f(x), f'(x))g(x)\big]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{dx}\big(F'_p(x, f(x), f'(x))\big)g(x)dx$$
$$= -\int_{a_1}^{a_2} \frac{d}{dx}\big(F'_p(x, f(x), f'(x))\big)g(x)dx$$

Således kan ovenstående led indsættes i ovenstående udtryk for $\phi'(0)$, hvor $g(x)$ ligeledes er sat udenfor parantes:

$$0 = \int_{a_1}^{a_2} \Big(F'_y(x, f(x), f'(x)) + \frac{d}{dx}\big(F'_p(x, f(x), f'(x))\big)\Big)g(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx$$

hvor vi altså har

$$h(x) = F'_y(x, f(x), f'(x)) + \frac{d}{dx}\big(F'_p(x, f(x), f'(x))\big)$$

Vi ønsker nu at vise, at der faktisk altid gælder at $h(x) = 0$ når $\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx = 0$, og vi således opnår en enklere nødvendig betingelse for ekstremum.

Hjælpesætning 1
Hvis en funktion $h \in C([a_1, a_2])$ har den egenskab at

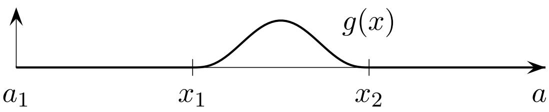
$$\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx = 0$$

for *enhver* funktion $g \in C^2([a_1, a_2])$ for hvilken $g(a_1) = g(a_2) = 0$, da er $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$.

Bevis

Vi antager til modstrid at h ikke er konstant lig 0. Da h er kontinuert, må der eksistere et $x \in]a_1, a_2[$ hvor $h(x) > 0$, nærmere betegnet at der i en omegn $]x_1, x_2[$ omkring x gælder at $h(x) > 0$ for alle x. Vi finder en funktion $g \in C^n([a_1, a_2])$, for hvilken det gælder, at $g(x) = 0$ for $x \in [a_1, x_1] \cup [x_2, a_2]$, samt at $g(x) > 0$ for alle $x \in]x_1, x_2[$. Et eksempel på en sådan funktion er

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a_1, x_1] \cup [x_2, a_2] \\ (x - x_1)^3 (x_2 + x)^3, & x \in]x_1, x_2[\end{cases}$$



At g for denne funktion er 2 gange differentiabel med kontinuerte afledte, tjekkes ved differentation - og da det åbenlyst gælder for $g(x) = 0$ behandles kun $x \in]x_1, x_2[$. Ved ivrig brug af produktreglen fås

$$g'(x) = 3(x - x_1)^2 (x_2 + x)^3 + 3(x - x_1)^3 (x_2 + x)^2$$

$$g''(x) = 6\big((x - x_1)(x_2 + x)^3 + 3(x - x_1)^2 (x_2 + 3)^2 + (x - x_1)^3 (x_2 + x)\big)$$

Da $g(x) = 0$ for $x \in [a_1, x_1] \cup [x2, a2]$ og da $g'(x) \to 0$ for $x \to x_1$ fra højre, og for $x \to x_2$ fra venstre er g differentiabel med kontinuert afledet i hele $[a_1, a_2]$. Tilsvarende fås at g'' eksisterer og er kontinuert i hele $[a_1, a_2]$, så $g \in C^2([a_1, a_2])$. Fortsættes yderligere vil vi opdage at $g'''(x)$ ikke går mod 0 i endepunkterne x_1,x_2, og dermed er g ikke en C^3-funktion i hele intervallet $[a_1, a_2]$. At g er en C^2-funktion er dog godt nok til dette bevis. Af indskudsreglen fås at

$$\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx = \int_{a_1}^{x_1} h(x)g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} h(x)g(x)dx + \int_{x_2}^{a_2} h(x)g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} h(x)g(x)dx$$

Da både $h(x) > 0$ og $g(x) > 0$ i hele delintervallet $]x_1, x_2[$, gælder dermed at $\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx > 0$. Dette er i modstrid med forudsætningerne, og dermed haves at $h(x) = 0$ for $x \in [a_1, a_2]$. Tilsvarende argument kan føres med $h(x) < 0$. Samlet set skal altså $h(x) = 0$ for $x \in [a_1, a_2]$. ■

Således kan vi nu opskrive

Sætning 1: Eulers differentialligning. Som nødvendig betingelse for lokalt ekstremum gælder, at $y = f(x)$ tilfredsstiller Eulers differentialligning (undertiden også kaldt Euler-Lagrange differentalligningen)

$$h(x) = F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{dy}{dx} F'_p(x, f(x), f'(x)) = 0$$

Der eksisterer yderligere et specialtilfælde af Eulers differentialligning, der gør det endnu lettere at regne på variationsproblemer.

Sætning 2: Specialtilfælde af Eulers differentialligning.
Hvis funktionen $F(x, y, p)$ ikke afhænger af x, kan Eulers differentialligning forenkles til

$$F(x, f(x), f'(x)) - F'_p(x, f(x), f'(x)) f'(x) = c$$

hvor c er en konstant

Bevis:
Udtrykkets rigtighed bevises ved at differentiere det, og genfinde Eulers differentialligning. Vi differentierer leddene hver for sig, og benytter at $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, når funktionen ikke afhænger af x (x er konstant). Vi differentierer første led ved brug af kædereglen

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x), f'(x)) = F'_y(x, f(x), f'(x))f'(x) + F'_p(x, f(x), f'(x))f''(x)$$

og 2. led ved differentation af produkt

$$\frac{d}{dx}\Big(F'_p(x, f(x), f'(x))f'(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(F'_p(x, f(x), f'(x))\Big)f'(x) + F'_p(x, f(x), f'(x))f''(x)$$

Vi er heldige at leddet $F'_p(x, f(x), f'(x))f''(x)$ forsvinder når de to led trækkes fra hinanden, og således fås

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big(F(x, f(x), f'(x)) - F'_p(x, f(x), f'(x))f'(x)\Big) \\ &= F'_y(x, f(x), f'(x))f'(x) - \frac{d}{dx}\Big(F'_p(x, f(x), f'(x))\Big)f'(x) \\ &= \bigg(F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\Big(F'_p(x, f(x), f'(x))\Big)\bigg)f'(x) = 0 \end{aligned}$$

Sidste lighedstegn kommer af, at første faktor i foregående udtryk ifg. Eulers differentialligning giver 0, og dermed giver det hele 0. Hermed er den oprindelige funktion nødt til at være konstant, og det ønskede er vist. ■

4 Den korteste vej mellem to punkter

For at komme blødt igang med variationsregningen, vil jeg først fokusere på det simple forhold at eftervise, at den korteste vej mellem to punkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2) er den rette linje. Et udtryk for en kurves samlede længde kan findes ved et kig på Pythagoras for små afstande[8]

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \quad \Rightarrow \quad L = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2}$$

Den funktional vi vil minimere er altså

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2}$$

hvor $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$. Vi benytter specialtilfældet af Eulers differentialligning, da vores funktion ikke afhænger af x. Således gælder

$$F(x, y, y') - F'_p(x, y, y')y' = c$$

[8]Samme problem er behandlet i Mat2, s. 232

hvor c er en konstant. Vi udregner $F_p'(x,y,y') = \frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}2y' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Hermed fås at

$$\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = c$$

Ovenstående udtryk afhænger alene af y', og hermed må gælde at y' selv er en konstant. Denne kalder vi a. Vi finder nu stamfunktionen til y'.

$$y' = a \quad \Rightarrow \quad y = \int a dx = ax + b$$

Heraf kan det ses, at den korteste vej mellem to punkter er den rette linje. Konstanterne a og b findes ved at indsætte vores randbetingelser i den endelige funktion, og løse to ligninger med to ubekendte.

5 Det brachistochrone problem[9]

Hvilken bane er det hurtigst for en partikel følge, hvis den gnidningsfrit kan komme fra et punkt (a_1, b_1) til (a_2, b_2)? Dette problem blev fremsat af Johann Bernouilli tilbage i 1696, og flere kom med løsningsmetoder. Her vil jeg redegøre for en løsningsmetode, som gør brug af variationsregningen.

Vi betragter problemet ud fra reglen om bevarelse af mekanisk energi, og et udtryk for partiklens hastighed v, som funktion af den lodrette faldlængde z. Begyndelsesfarten er angivet med v_0 og m er partiklens masse:

$$-\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin} \Leftrightarrow mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2gz \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$

Samtidig gælder at $v = s' = \frac{ds}{dt}$, hvor $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}$, begrundet udfra Pythagoras' sætning. Ved hjælp af kædereglen omskrives dette udtryk:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)}\frac{dx}{dt}$$

Den samlede faldtid $T = \int_{a_1}^{a_2} dt$ er den størrelse vi ønsker at optimere, da partiklen naturligt vil følge den hurtigste kurve. Vi kombinerer vores to udtryk for v, for at få et udtryk for dt:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{v_0^2 + 2gz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad T = \int_{a_1}^{a_2} dt = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{1 + (\frac{dz}{dx})}{v_0^2 + 2gz}}dx$$

Vi indfører nu en y-akse parallel med vor hidtidige z-akse, dog med den forskel, at der foretages parallelforskydningen $z = y - \frac{v_0^2}{2g}$. Hermed kan vi udtrykke T som

$$T = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{1 + (z')}{v_0^2 + 2gz}}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}dx$$

[9](græsk) brachistos chronos = kortest tid

hvor $z' = \frac{dz}{dx}$ og $y' = \frac{dy}{dx}$. Disse er iøvrigt ens, da v_0 er konstant. Vi bemærker desuden at randbetingelserne nu udgøres af punkterne $(a_1, b_1 + \frac{v_0^2}{2g})$ og $(a_2, b_2 + \frac{v_0^2}{2g})$, der er tilsvarende parallelforskudt.

Vi udelader $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, da dette led er konstant for alle legemer. Vi vil altså optimere funktionalen

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Vi har altså funktionen $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$ og på denne benyttes specialtilfældet af Eulers differentialligning, der udtaler sig om ekstrema for funktioner, hvor $I(f)$ ikke afhænger af x. For den mest optimale funktion y opfyldes altså at

$$F(x, y, y') - F'_p(x, y, y')y' = c$$

hvor c er en konstant. Ved differentation af sammensat funktion fås $F'_p(x, y, y') = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}$, og hermed ved vi at

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}} y' = c \quad \Leftrightarrow \quad y(1 + (y')^2) = \frac{1}{c^2} = 2\alpha$$

hvor vi istedet for c har indført en ny konstant 2α af hensyn til, at slutresultatet gerne skulle blive pænt. Vi isolerer y'

$$y(1 + (y')^2) = 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}$$

og ved seperation af de variable fås et udtryk for x

$$\Leftrightarrow \quad \int dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}} dy \quad \Leftrightarrow \quad x = \int \sqrt{\frac{y}{2\alpha - y}} dy$$

For at løse dette integral, substitueres med $y = 2\alpha \sin(\frac{u}{2})^2 = \alpha(1 - \cos(u))$, $0 < u < \pi$, hvor $\frac{dy}{du} = 2\alpha \sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{u}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad dy = 2\alpha \sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{u}{2}) du$:

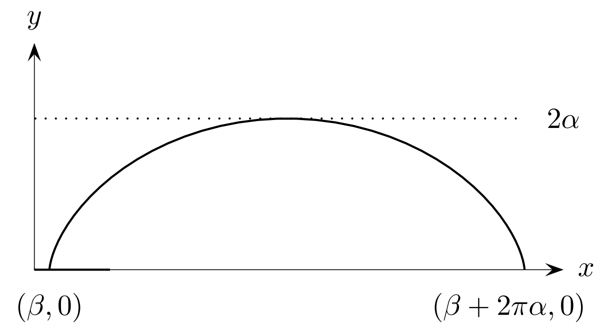
$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2\alpha - y}} dy = \int \sqrt{\frac{2\alpha \sin(\frac{u}{2})^2}{2\alpha \cos(\frac{u}{2})^2}} 2\alpha \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) du = \int 2\alpha \sin\left(\frac{u}{2}\right)^2 du$$

$$= \alpha \int 1 - \cos(u) du = \alpha(u - \sin(u)) + \beta$$

Vi har nu en parameterfremstilling for kurven, partiklen vil følge, med u som løbende variabel.

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u - \sin(u)) + \beta \\ \alpha(1 - \cos(u)) \end{pmatrix}$$

En kurve af denne type kaldes også en *cykloide*.



Det kan vises, at der kun går én cykloidebue gennem to givne punkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2), ved at se på, at to cykloidebuer er ligedannede for forskelligt α. Således er det godtgjort, at der for endepunkterne $(a_1, b_1 + \frac{v_0^2}{2g})$ og $(a_2, b_2 + \frac{v_0^2}{2g})$ kun er én stationær funktion mht. $I(f)$.

5.1 Hvor lang tid tager det så?

Vi har nu fundet ud af, hvordan den hurtigste kurve ser ud. Men *hvor* hurtigt bevæger en partikel sig af denne, sammenlignet med fx. en ret linje? Hvis vi for nemheds skyld sætter $\alpha = 1$ og $\beta = 0$ i ovenstående parameterfremstilling, og kurven er dermed givet ved

$$x = u - \sin(u)$$

$$y = 1 - \cos(u)$$

skal partiklen bevæge sig fra $(0, 0)$ til $(\pi, 2)$. Vi bemærker at y-aksen er fortsat positiv nedad, og enheden på begge akser er SI-enheden meter. Med disse punkter har vi gjort det principielle forkert at ovenstående teori ikke gælder for $v_0 = 0$ (så er F ikke længere en C^2-funktion), men vi vælger alligevel at se cykloidebuen som løsning - også for grænsetilfældet $v_0 = 0$. Funktionalen som måler tiden er nu givet ved:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Vi finder $\frac{dx}{du} = 1 - \cos(u) \quad \Leftrightarrow \quad dx = 1 - \cos(u) du$ og $\frac{dy}{du} = sin(u)$ og herved er y'

$$y'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \sin(u) \cdot (\frac{dx}{du})^{-1} = \sin(u)(1 - \cos(u))^{-1}$$

og vi kan indsætte vores kendte y og den netop udregnede y' i udtrykket for T, hvor vi også substituerer x med u

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 + \sin(u)^2 (1 - \cos(u))^{-2}}}{\sqrt{1 - \cos(u)}} (1 - \cos(u)) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{(1 - \cos(u))^2 + sin(u)^2}}{\sqrt{1 - \cos(u)}} du = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{2 - 2\cos(u)}}{\sqrt{1 - \cos(u)}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{2} du = \frac{1}{\sqrt{g}} [u]_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{9.82}} \approx 1.00252$$

Det tager altså ca. 1 sekund for vores partikel at "rutsche" af cykloidebuen. Hvis vi sammenligner med en ret linje med tilsvarende endepunkter, vil differentialkvotienten være lig hældningskoefficienten:

$$y' = \frac{\pi - 0}{2 - 0} = \frac{\pi}{2}$$

og funktionen y der beskriver linjen er dermed

$$y - 0 = \frac{\pi}{2}(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2}x$$

Indsættes dette i funktionalen fås

$$T_l = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{2})^2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{\sqrt{2\pi x}} dx = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2\sqrt{g\pi}} \int_0^{\pi} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2\sqrt{g\pi}} [2\sqrt{x}]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{\sqrt{9.82}} \approx 1.18844$$

Altså tager det ca. 1.2 sekunder, hvis partiklen skal følge en ret linje. Linjen er dermed op mod $\frac{T_l - T_c}{T_c} \approx 19\%$ langsommere - det er da en forskel der er til at tage at føle på.

6 Omdrejningslegeme med minimalt overfladeareal

Hvilken funktion der forbinder to punkter (a_1, b_1) og (a_2, b_2) konstruerer det omdrejningslegeme der har mindst overfladeareal? Denne problemstilling er ikke kun matematisk interessant, men beskriver samtidig den form, en sæbebobbel vil indstille sig efter, hvis den er udspændt imellem to ringe. Udtrykket vi vil optimere, er

$$A = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$2\pi y$ er omdrejningslegemets omkreds for et givent x, og $\sqrt{1 + (y')^2}$ er (som tidligere behandlet) kurvens længde for et givent x. Ganges disse sammen fås overfladearealet for et lille stykke, og integreres udtrykket findes det for hele intervallet $[a_1, a_2]$. 2π er konstant, og således er funktionalen vi vil optimere

$$I = I(f) = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1 + (y')^2} dx$$

hvor $F(x, y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$. Igen er vi heldige, at problemet ikke afhænger direkte af x, og specialtilfældet af Eulers differentialligning er nok. For den stationære funktion y gælder altså at

$$F(x, y, y') - F'_p(x, y, y')y' = \alpha$$

hvor α er en konstant. Vi finder at $F'_p(x, y, y') = \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ og indsat fås at

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad y = \alpha\sqrt{1 + (y')^2}$$

$$(y')^2 = \frac{y^2}{\alpha^2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1} = \pm\frac{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

og ved seperation af de variable findes et udtryk for x (vi kigger på den positive løsning)

$$x = \int dx = \int \frac{\alpha}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} dy$$

For at løse dette integral foretages substitutionen $y = \alpha \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dy = \alpha \sinh(u) du$ hvor $u > 0$

$$x = \int \frac{\alpha}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} dy = \int \frac{\alpha^2 \sinh(u)}{\sqrt{(\alpha^2 \cosh(u)^2 - \alpha^2}} du = \int \frac{\alpha^2 \sinh(u)}{\sqrt{\alpha^2 \sinh(u)^2}} du = \int \alpha du = \alpha u + \beta$$

Kombineres vores definitioner af x og y, kan vi helt eliminere behovet for u-parametren

$$x = \alpha u + \beta \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{x - \beta}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = \alpha \cosh(u) = \alpha \cosh\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$$

Det ses nu, at der er den naturlige begrænsning på ovenstående udtryk, at $\alpha > 0$, da udtrykket for $\alpha = 0$ er uegentligt, og det for $\alpha < 0$ ikke kan beskrive et omdrejningslegeme. β er der ingen begrænsninger på. Dog viser det sig, at det ikke er helt enkelt at finde konstanterne α og β ud fra randbetingelserne – og i bedste fald vil de kun kunne findes numerisk. Er de to valgte punkter tilstrækkeligt langt fra hinanden, er der dog ikke nogen løsning. Set i forhold til den fysiske sammenligning, med to ringe hvor der imellem er udspændt en sæbebobbel, er dette måske ikke så mærkeligt: Når ringene trækkes tilstrækkeligt langt fra hinanden, vil sæbeboblen naturligt briste.

7 Variationsproblemer med bibetingelser

Undertiden er det nødvendigt at medtage bibetingelser ved løsning af variationsproblemer. Et variationsproblem med bibetingelse kaldes også et *isoperimetrisk problem*[10]. Det mest kendte er måske det *egentlige* isoperimetriske problem, der går ud på, at genfinde cirklen som den kurve med størst indre areal i forhold til omkredsen. Et andet problem, som jeg vil behandle til sidst i denne opgave, er *kædelinjen*, der går ud på at bestemme den kurve, som et tov vil indstille sig efter, hvis det hænges op i to punkter.

Først er der dog lidt teori, der skal udredes. [11]

Hjælpesætning 2
Lad ϕ, ψ være to C^2-funktioner defineret på en åben mængde $U \in \mathbb{R}^2$, så $(0,0) \in U$. Hvis ϕ har ekstremum i $(0,0)$ under bibetingelsen $\psi(s,t) = \psi(0,0)$, da er determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial \psi}{\partial s}(0,0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(0,0) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(0,0) \end{vmatrix} = 0$$

[10] Def. Bog [2] s. 21.

[11] I de gamle noter fra København Universitet er der redegjort for variationsproblemer med vilkårligt mange bibetingelser. I Erik B. Hansens bog (s. 21-23) snakkes om variationsproblemer med én bibetingelse, men beviset er ikke særlig stringent. Det følgende er en forsimpling af førstnævnte og - forhåbentlig - en forbedring af sidstnævnte.

Bevis
Der anvendes et indirekte bevis. Vi antager at

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial\psi}{\partial s}(0,0) \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) & \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi skal nu vise, at ϕ ikke har ekstremum i $(0,0)$ under bibetingelsen $\psi(s,t) = \psi(0,0)$. Tallet D er determinanten hørende til gradientvektorerne for ϕ og ψ i (0,0)

$$\nabla\phi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial s}(0,0) \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix} \wedge \nabla\psi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial s}(0,0) \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix}$$

Da $D \neq 0$ vides også at $\nabla\phi(0,0)$ og $\nabla\psi(0,0)$ begge er egentlige vektorer, samt at de ikke er parallele. [12] Vi definerer niveaukurven for ψ gennem (0,0)

$$C = \{(s,t) \in U | \psi(s,t) = \psi(0,0)\}$$

Tangenten til C i $(0,0)$ har en retningsvektor $\vec{v}$ af længden 1, som naturligt står vinkelret på $\nabla\psi(0,0)$.[13]. Da $\nabla\phi(0,0)$ og $\nabla\psi(0,0)$ ikke er paralelle, er

$$\nabla\phi(0,0) \cdot \vec{v} \neq 0$$

så den retningsafledte til ϕ i (0,0) i retningen v er forskellig fra 0. Derfor vil $\phi(s,t)$ enten vokse eller aftage, når man bevæger sig langs C gennem $(0,0)$. Derfor har ϕ ikke ekstremum under betingelsen $(s,t) \in C$ $(\psi(s,t) = \psi(0,0))$. ■

Sætning 3: Variationsproblem med én bibetingelse
Antag at

$$I_0(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_0(x, f(x), f'(x))dx$$

har ekstremum under bibetingelsen

$$I_1(f) = \int_{a_1}^{a_2} F_1(x, f(x), f'(x))dx = c$$

hvor c er en konstant. Da findes et talpar $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$ så f opfylder Eulers differentialligning m.h.t

$$I(f) = \lambda_0 I_0(f) + \lambda_1 I_1(f)$$

Bevis
Vi definerer mængden G af funktioner g

$$G = \{g \in C^2([a_1, a_2]) | g(a_1) = g(a_2) = 0\}$$

[12]Fra dette punkt, er beviset analogt til Calculus s. 721
[13]Calculus s. 681

Vi deler beviset op i to tilfælde.

Tilfælde 1: Vi antager, at der findes en funktion $g_0 \in G$ så

$$\frac{d}{d\epsilon} I_0(f + \epsilon g_0)_{|\epsilon=0} \neq 0$$

Dvs. der findes en funktion $g_0 \in G$, der bevirker, at Eulers differentialligning ikke er opfyldt for I_0 alene. Vi vælger en sådan funktion g_0. Desuden vælges en vilkårlig $g \in G$. Vi vil anvende Hjælpesætning 2 på funktioner, og definerer derfor

$$\begin{aligned} \phi(s,t) &= I_0(f + sg_0 + tg) \\ \psi(s,t) &= I_1(f + sg_0 + tg) \end{aligned}$$

Da $I_0(f)$ har ekstremum i f under bibetingelsen $I_1(f) = c$ må ϕ have ekstremum i $(0,0)$ under bibetingelsen $\psi(s,t) = \mathrm{c} = \psi(0,0)$. Ifølge Hjælpesætning 2 gælder altså

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial \phi}{\partial t}(0,0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(0,0) & \frac{\partial \psi}{\partial t}(0,0) \end{vmatrix} = 0$$

dvs.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s} I_0(f + sg_0)_{|s=0} & \frac{\partial}{\partial t} I_0(f + tg)_{|t=0} \\ \frac{\partial}{\partial s} I_1(f + sg_0)_{|s=0} & \frac{\partial}{\partial t} I_1(f + tg)_{|t=0} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Vi definerer nu

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{\partial}{\partial s} I_1(f + sg_0)_{|s=0} \\ \lambda_1 &= \frac{\partial}{\partial s} I_0(f + sg_0)_{|s=0} \end{aligned}$$

Det kan ses at $\lambda_1 \neq 0$, da vi netop valgte g_0 af hensyn til dette. Dermed er $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$ og vi ved udregning af determinanten fås

$$\left(\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} I_0(f + tg) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} I_1(f + tg)\right)_{|t=0} = 0$$

Ovenstående gælder altså for alle funktioner $g \in G$. Heraf kan ses at f altså er en stationær funktion for

$$I(f) = \lambda_0 I_0(f) + \lambda_1 I_1(f)$$

og opfylder derfor Eulers differentialligning mht. $I(f)$.

Tilfælde 2: Vi antager nu at

$$\frac{d}{d\epsilon} I_0(f + \epsilon g)_{|\epsilon=0} = 0$$

for alle $g \in G$. Da er f en stationær funktion mht. I_0, så i dette tilfælde kan vælges talparret $(\lambda_0, \lambda_1) = (1, 0)$, da vi så får at $I(f) = I_0(f)$. ∎

Vi har altså nu en metode til at finde stationære funktioner for $I(f)$, også selvom der er en bibetingelse knyttet til ekstremaet.

8 Kædelinjen

En snor er ophængt i punkterne (a_1, b_1) og (a_2, b_2), og det er nu vores opgave, at finde ud af, hvilken kurve denne snor indstiller sig efter. For at kunne løse problemet med den udledte teori, antager vi som sædvanlig at $a_1 < a_2$ og at funktionen $y = f(x)$ er en C^2-funktion i intervallet $[a_1, a_2]$.

Vores hovedbetingelse er, at den potentielle energi $E_{pot} = mgy$ for snoren skal være mindst mulig. Vi indfører en størrelse ρ, som beskriver masse m pr. længdeenhed l. Hermed har vi flg. definitioner

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{(1 + (y')^2)} \ \wedge \ \Delta m = \rho \Delta l \ \wedge \ \Delta E_{pot} = \Delta mgy$$

og kombineres disse

$$\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta x} = \rho gy\sqrt{(1 + (y')^2)} \quad \Rightarrow \quad E_{pot} = \rho g \int_{a1}^{a_2} y\sqrt{(1 + (y')^2)}dx$$

Desuden har vi bibetingelsen, at den samlede længde skal være bestemt ved en konstant L

$$L = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2}$$

Kædelinjen bestemmes blandt de tilladte funktioner $y = f(x)$ hvor

$$I_0 = I_0(f) = \int_{a1}^{a_2} y\sqrt{(1 + (y')^2)}dx$$

har globalt minimum, under bibetingelsen

$$I_1 = I_1(f) = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2} = L$$

hvor L er en konstant. Vi har nu en sætning der siger, at der under disse omstændigheder eksisterer et talpar $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0)$ så $y = f(x)$ opfylder Eulers differentialligning mht.

$$I(f) = \lambda_0 I_0(f) + \lambda_1 I_1(f)$$

$$= \lambda_0 \int_{a1}^{a_2} y\sqrt{(1 + (y')^2)}dx + \lambda_1 \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 y + \lambda_1)\sqrt{1 + (y')^2}dx$$

Hvis $\lambda_0 = 0$ skal $\lambda_1 \neq 0$, og dermed skal

$$I(f) = \lambda_1 \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

minimeres. Løsningen hertil har vi allerede fundet på s. 5, og dette er den rette linje. Hvis $\lambda_0 \neq 0$, vælger vi at definere en ny konstant $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, og multiplicere $I(f)$ med $\frac{1}{\lambda_0}$

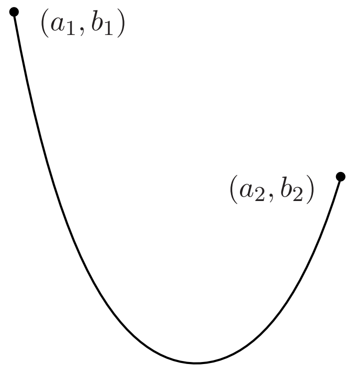
$$I(f) = \frac{1}{\lambda_0} \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 y + \lambda_1)\sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{a_1}^{a_2} (y + \lambda)\sqrt{1 + (y')^2}dx$$

Også dette problem har vi tidligere løst - dog er y nu ændret til $y + \lambda$. Dette gør dog ingen forskel, da $(y + \lambda)' = y'$. Vi kan derfor overføre løsningen fra tidligere

$$y + \lambda = \alpha \cosh\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ \wedge \ \beta \in \mathbb{R}$$

Vi har nu dog også α defineret for negative tal. Dog viser det sig, at hvis $\alpha < 0$ maksimeres den potentielle energi (I_0), hvilket ikke er det vi ønsker. I løsningen på den fysiske problemstilling skal altså $\alpha > 0$, for at den potentielle energi minimeres.

Vi kan desuden bemærke, at antallet af konstanter (3 stk.) svarer til antallet af betingelser: Vores 2 randbetingelser $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ og bibetingelsen $I_1(f) = L$. Således haves 3 ligninger med 3 ubekendte, og det burde kunne løses – som tidligere omtalt, er dette dog ikke helt enkelt for denne forskrift.



9 Konklusion

Jeg har nu gennemgået det om variationsregning, der på rimelig vis kan være på 15 sider. Ved at gennemregne beviser og eksempler fra den eksisterende litteratur, har jeg opnået et solidt grundkendskab til teorien for variationsregning. Variationsregningen byder dog på meget mere, især hvis man går videre med funktioner af flere variable, og den har rige anvendelsesmuligheder i bl.a. fysikken.

Differentation er et håndværk, Integration er en kunst! plejer man at sige. Eksemplerne i denne opgave har til tydelighed vist dette, da ikke så simple integraler bliver høvlet ned ved skarpsindige substitutioner, som kloge matematikere gennem tiden er kommet frem til. Og selvom det måske er svært at "mekanisere" løsningen af variationsproblemer, har jeg alligevel været igennem nok i denne opgave, til at vise, at der er en vis metode i det.

Litteratur

[1] Jessen, Børge. Mat 1y 1968-1969 Pakke 19, kopier af håndskrevne noter fra København Universitet.

[2] Hansen, Erik B. Variationsregning, Polyteknisk Forlag, 1993.

[3] Petersen, Richard. Forelæsniner over variationsregning, Akademisk Forlag 1969.

[4] Adams, Robert A., Calculus, 6th ed., 2006

[5] Hansen, Vang L. Grundbegreber i den moderne analyse, Matematisk Institut, DTU 1995.

[6] Carstensen, Jens m.fl. Mat2A, Systime, 1998.